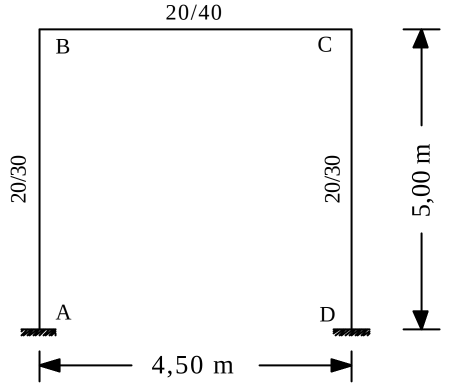
Aplicación de Matriz b

Utilizando matriz β hallar las solicitaciones en la siguiente estructura para los distintos estados de carga que se proponen.



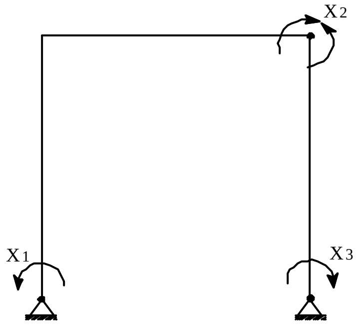
$E_b = 210\ t/cm^2$

$$I_{AB} = 20 \times \frac{30^3}{12} = 45.000\ cm^4 = I_0$$

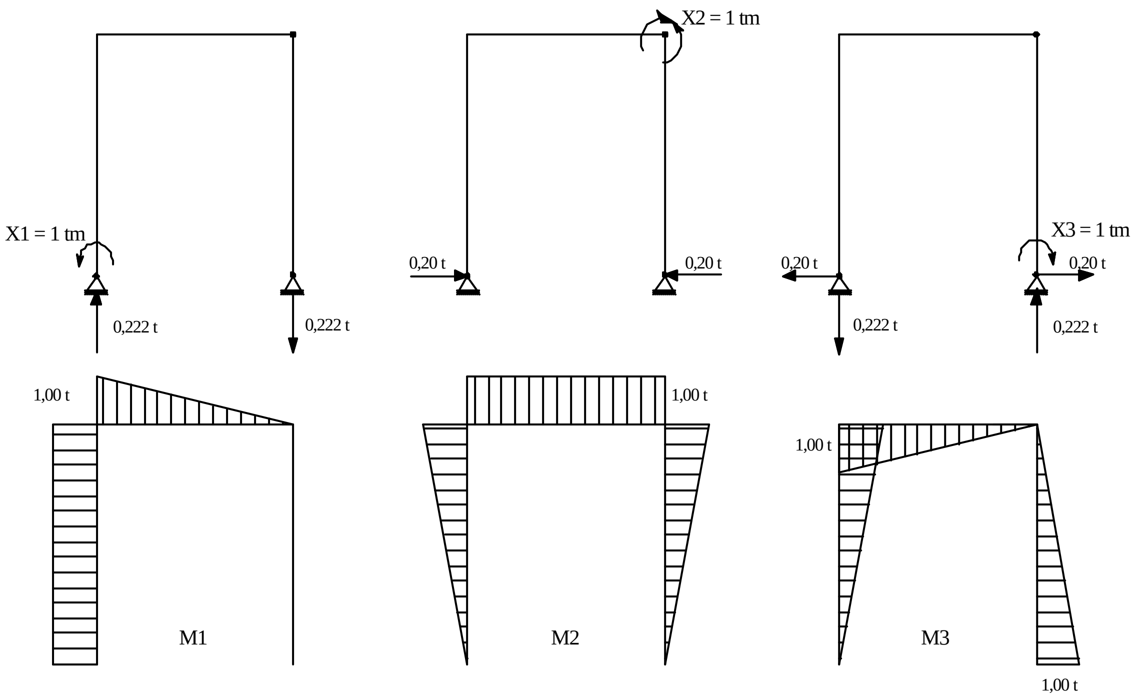
$$I_{BC} = 20 \times \frac{40^3}{12} = 106.667\ cm^4 = 2{,}37\ I_0$$

Recordamos que por teoría de Matriz β ⇒ $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{do}$, siendo β matriz de coeficientes que dependen de las características geométricas de la estructura y del fundamental adoptado. No dependen del estado de carga.

Como primer paso adoptamos un isostático fundamental.



A continuación, se calculan los términos o coeficientes de influencia δ_{ij}, que corresponden a desplazamientos para estados unitarios virtuales de carga.



Utilizando tablas de integranles:

$E \times I_0 \times \delta_{11} = \delta'_{11}$ = 1 × 1 × 5 + (1/2,37) × (1/3) × 1× 1 × 4,5 = 5,633

$E \times I_0 \times \delta_{12} = \delta'_{12}$ = (1/2) × 1 × 1 × 5 + (1/2,37) × (1/2) × 1 × 1 × 4,5 = 3,449

$E \times I_0 \times \delta_{13} = \delta'_{13}$ = - (1/2) × 1 × 1 × 5 – (1/2,37) × (1/3) × 1 × 1 × 4,5 = - 3,133

$E \times I_0 \times \delta_{22} = \delta'_{22}$ = (1/3) × 1 × 1 × 5 × (2) + (1/2) × 1 × 1 × 4,5 = 5,232

$E \times I_0 \times \delta_{23} = \delta'_{23}$ = - (1/3) × 1 × 1 × 5 – (1/2,37) × (1/2) × 1 × 1 × 4,5 + (1/6) × 1 × 1 × 5 = - 1,783

$E \times I_0 \times \delta_{33} = \delta'_{33}$ = (1/3) × 1 × 1 × 5 + (1/2,37) × (1/3) × 1 × 1 × 4,5 + (1/3) × 1 × 1 × 5 = 3,966

Con los coeficientes calculados podemos crear la matriz $\underset{\sim}{d}'$.

$$\begin{vmatrix} \delta'_{11} & \delta'_{12} & \delta'_{13} \\ \delta'_{21} & \delta'_{22} & \delta'_{23} \\ \delta'_{31} & \delta'_{32} & \delta'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5,633 & 3,449 & -3,133 \\ 3,449 & 5,232 & -1,783 \\ -3,133 & -1,783 & 3,966 \end{vmatrix} = \underset{\sim}{d}'$$

En función de los valores δ_{ij} y δ_{io} $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{d} \times \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{do} = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{do}$

Para δ'_{ij} y δ'_{io} $\Rightarrow \left(\dfrac{1}{E.Io}\right)\underset{\sim}{d}' \times \underset{\sim}{X} + \left(\dfrac{1}{E.Io}\right)\underset{\sim}{do} = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{d}' \times \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{do}' = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{b}^* \times \underset{\sim}{do}'$

Dónde $\beta^* = (-1)\left(\underset{\sim}{d}'^{-1}\right)$; $\underset{\sim}{b} = (E\ Io)\ \underset{\sim}{b}^*$

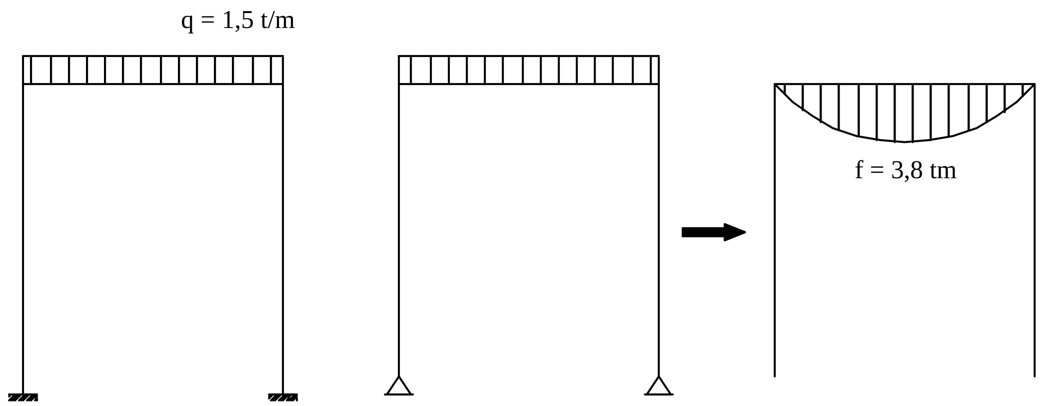
Determinación de $\underset{\sim}{b}^*$:

$$\begin{vmatrix} \beta^*_{11} & \beta^*_{12} & \beta^*_{13} \\ \beta^*_{21} & \beta^*_{22} & \beta^*_{23} \\ \beta^*_{31} & \beta^*_{32} & \beta^*_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,451 & 0,208 & -0,263 \\ 0,208 & -0,321 & 0,020 \\ -0,263 & 0,020 & -0,451 \end{vmatrix} = \underset{\sim}{b}^*$$

Obsérvese que tanto $\underset{\sim}{d}'$ como $\underset{\sim}{b}^*$ son matrices simétricas. Reiteramos; los valores de β^*_{ij} calculados son independientes de los estados de carga.

Estados de Carga

Estado I



M_0^I

f = 1,5 × ($4,5^2$/8) = 3,8 tm

Integrando M_0 con M_1, M_2 y M_3:

$E \times I_0 \times \delta_{10} = \delta'_{10}$ = - (1/2,37) × (1/3) × 1 × 3,8 × 4,5 = - 2,405

$E \times I_0 \times \delta_{20} = \delta'_{20}$ = - (1/2,37) × (2/3) × 1 × 3,8 × 4,5 = - 4,810

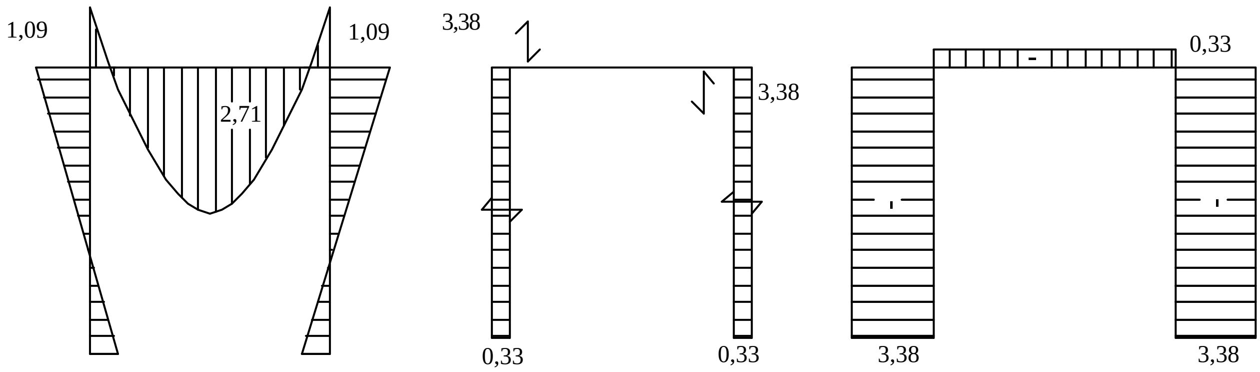
$E \times I_0 \times \delta_{13} = \delta'_{13}$ = (1/2,37) × (1/3) × 1 × 3,8 × 4,5 = 2,405

$$\underset{\sim}{do}' = \begin{vmatrix} -2,405 \\ -4,810 \\ 2,405 \end{vmatrix}$$

Calculo de las incógnitas:

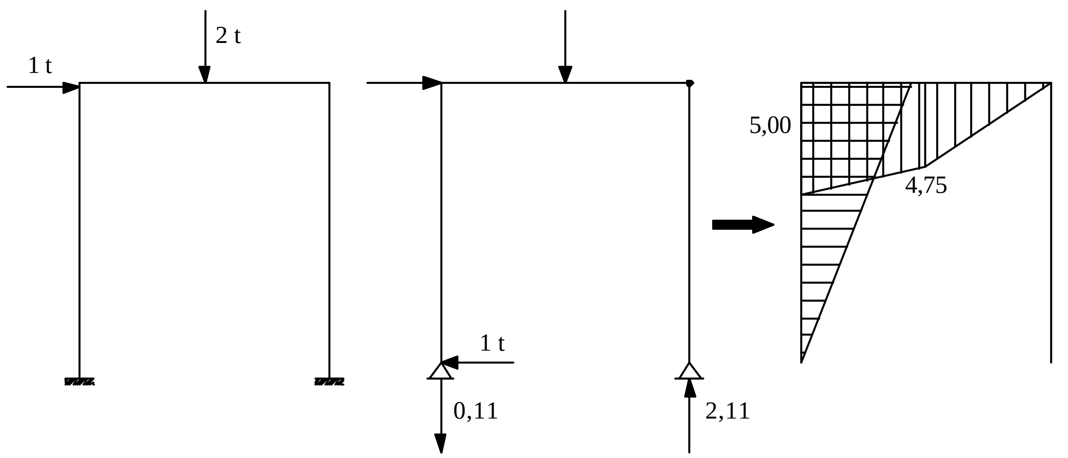
$$\underset{\sim}{X}^{I} = \begin{vmatrix} -0,451 & 0,208 & -0,263 \\ 0,208 & -0,321 & 0,020 \\ -0,263 & 0,020 & -0,451 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -2,405 \\ -4,810 \\ 2,405 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,55 \\ 1,09 \\ -0,55 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^I \\ X_2^I \\ X_3^I \end{vmatrix}$$

Con estos valores de incógnitas podemos determinar los diagramas:



M^I Q^I N^I

Estado II



M_0^{II}

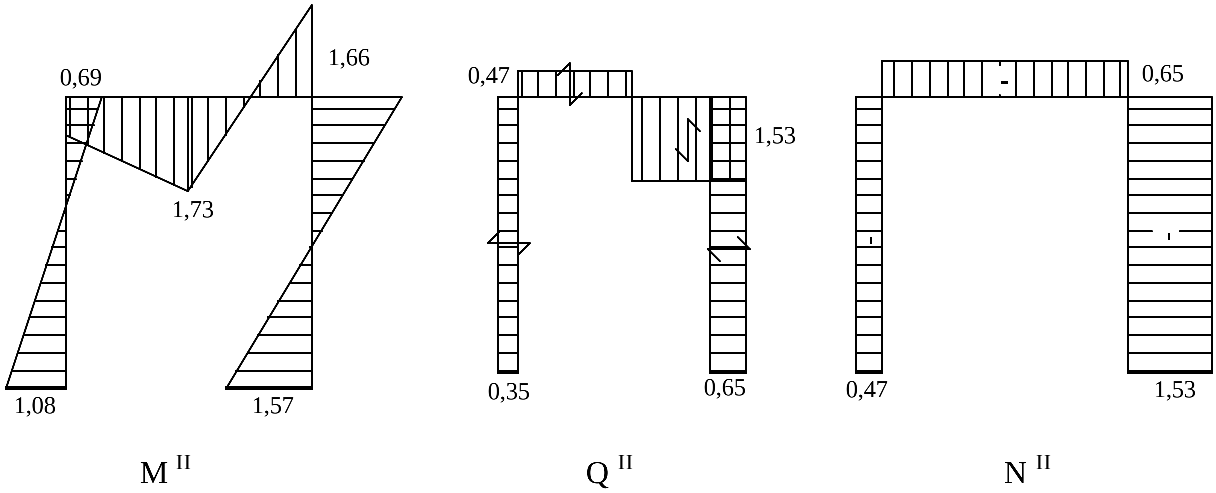
Integrando M_0 con M_1, M_2 y M_3:

$E \times I_0 \times \delta_{10} = \delta'_{10}$ = - (1/2) 5 × 5 - [1/6 (2 × 5 + 5 × 0,5 + 4,75 + 2 × 0,5 × 4,75) + (1/3) × 0,5 × 4,75] × (2,25/4,37) = - 16,733

$E \times I_0 \times \delta_{20} = \delta'_{20}$ = - (1/3) 5 × 5 - [1/2 (5 + 4,75) + (1/2) × 4,75] × (2,25/2,37) = - 15,216

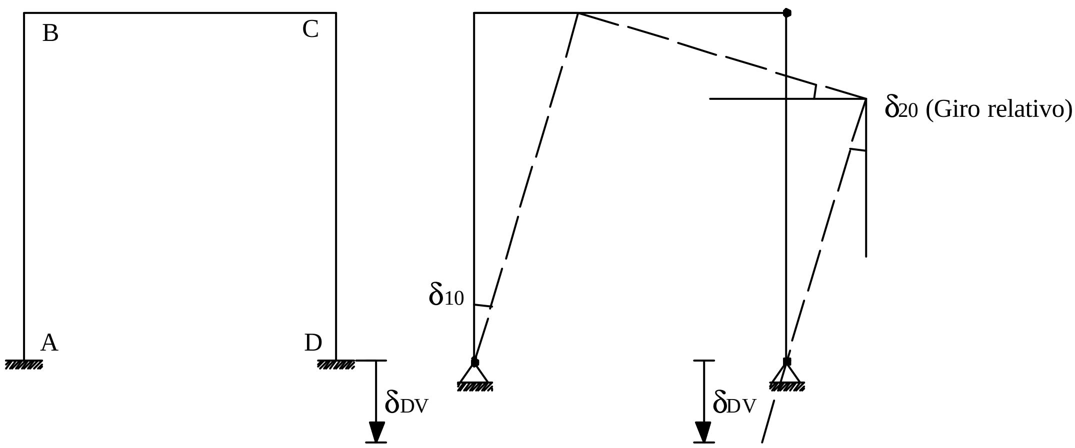
$E \times I_0 \times \delta_{30} = \delta'_{30}$ = (1/3) 5 × 5 + [1/6 (2 × 5 + 5 × 0,5 + 4,75 + 2 × 0,5 × 4,75) + (1/3) × 0,5 × 4,75] × (2,25/4,37) = 12,566

$$\underset{\sim}{X}^{II} = \begin{vmatrix} -0{,}451 & 0{,}208 & -0{,}263 \\ 0{,}208 & -0{,}321 & 0{,}020 \\ -0{,}263 & 0{,}020 & -0{,}451 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -16{,}733 \\ -15{,}216 \\ 12{,}566 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1{,}08 \\ 1{,}66 \\ -1{,}57 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^{II} \\ X_2^{II} \\ X_3^{II} \end{vmatrix}$$



Estado III

Corresponde a un desplazamiento virtual del apoyo D. ⇒ δ_D^V = 4 cm



Teniendo en cuenta los vínculos del fundamental, al producirse el desplazamiento d_D^V (desplazamiento pequeño), la estructura en su conjunto se deforma sin que se produzcan

solicitaciones en sus barras ($M_0^{II} = 0$). En base a ello se considera que $\overline{T}_{id} = 0$ para los estados de carga M_1, M_2 y M_3.
En cada estado virtual de carga será:

Para $M_1 \Rightarrow \overline{T}_e = 1tm \times d_{10} + V_D \times d_D = \overline{T}_{id} = 0 \Rightarrow d_{10} = \dfrac{-0{,}222 \times 0{,}04}{1} = -\overset{r}{0}{,}0089$

Para $M_2 \Rightarrow \overline{T}_e = 1tm \times d_{20} + 0 = \overline{T}_{id} = 0 \Rightarrow d_{20} = 0{,}00$

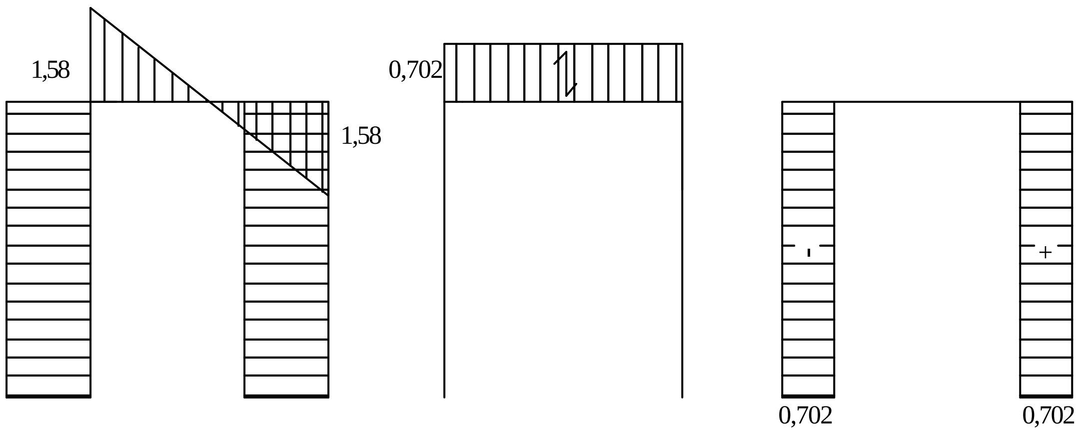
Para $M_3 \Rightarrow \overline{T}_e = 1tm \times d_{30} - V_D \times d_D = \overline{T}_{id} = 0 \Rightarrow d_{30} = \dfrac{+0{,}222 \times 0{,}04}{1} = +\overset{r}{0}{,}0089$

Para calcular los valores de X_i, debemos determinar los $\delta'_{io} = E \times I_0 \times \delta_{io}$

$E \times I_0 = 2.100.000 \text{ t/m}^2 \times 0{,}00045 \text{ m}^4 = 945 \text{ tm}^2$

$\delta'_{10} = -8{,}41 \text{ tm}^2$; $\delta'_{20} = 0{,}00 \text{ tm}^2$; $\delta'_{30} = +8{,}41 \text{ tm}^2$

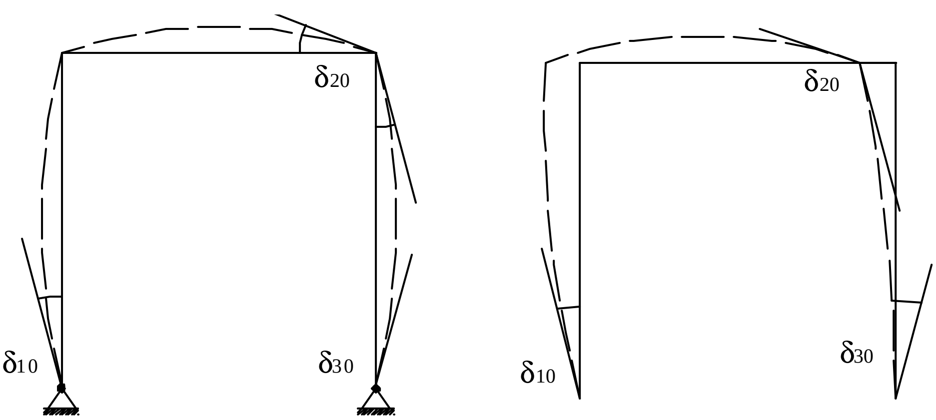
$$\underset{\sim}{X}^{III} = \begin{vmatrix} -0{,}451 & 0{,}208 & -0{,}263 \\ 0{,}208 & -0{,}321 & 0{,}020 \\ -0{,}263 & 0{,}020 & -0{,}451 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -8{,}41 \\ 0{,}00 \\ +8{,}41 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +1{,}58 \\ -1{,}58 \\ -1{,}58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^{III} \\ X_2^{III} \\ X_3^{III} \end{vmatrix}$$



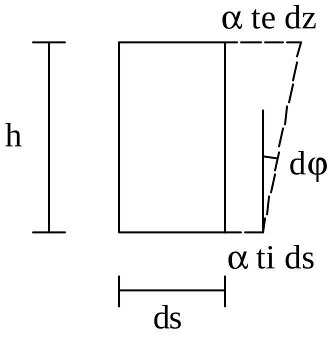
M^{III} Q^{III} N^{III}

Estado VI
Corresponde a variación de temperatura entre caras internas y externas.

$T_e = +30°$ c $T_i = +10°$ c $\alpha = 1 \times 10^{-5}$/° c



Para cada estado virtual de carga será:



$$dj = \frac{a \times (te - ti) \times ds}{h} \Rightarrow d\overline{T}_e = \overline{M} \times dj$$

En cada caso, atender al signo del trabajo interno.

$\delta_{10} = +1 \times 10^{-5}$ (20) [(1 × 5) / 0,30 + (1 × 5) / (2 × 0,40)] = $+\overset{r}{0},00458$

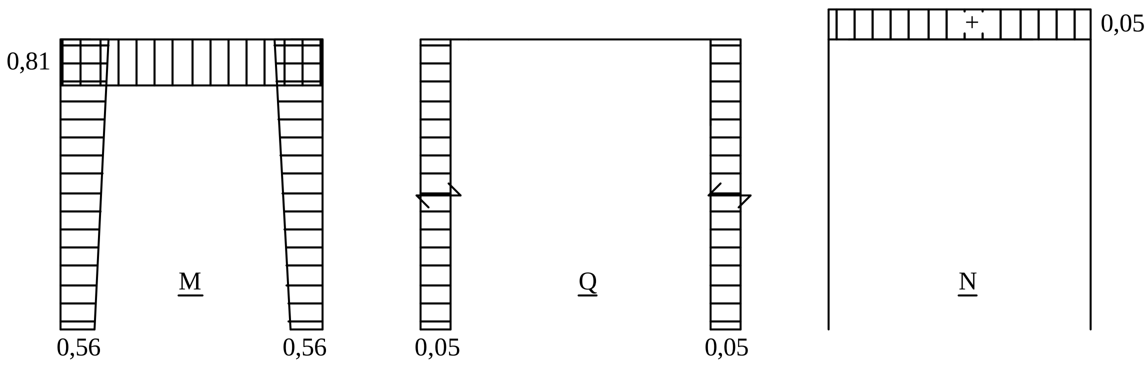
Para $M_2 \Rightarrow \delta_{20} = +1 \times 10^{-5}$ (20) [(2 × 1 × 5) / (2 × 0,30) + (1 × 4,50) / 0,40)] = $+\overset{r}{0},00558$

Para $M_3 \Rightarrow \delta_{30} = +1 \times 10^{-5}$(20) [-(1 × 5)/(2 × 0,30)-(1 × 4,50)/(2 × 0,40)+(1 × 5)/(2 × 0,30)] = $-\overset{r}{0},00113$

Calculo de δ'_{i0} ($E \times I_0 = 945$ tm^2)

$\delta'_{10} = 4,328$ tm^2 ; $\delta'_{20} = 5,273$ tm^2 ; $\delta'_{30} = -1,068$ tm^2

$$\underset{\sim}{X}^{IV} = \begin{vmatrix} -0,451 & 0,208 & -0,263 \\ 0,208 & -0,321 & 0,020 \\ -0,263 & 0,020 & -0,451 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} +4,328 \\ +5,273 \\ -1,068 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,57 \\ -0,81 \\ -0,55 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^{IV} \\ X_2^{IV} \\ X_3^{IV} \end{vmatrix}$$



(Simétrico) (Asimétrico) (Simétrico)